

ορισμός: Έστω $\delta x \in E$. Τότε θα λέμε ότι τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in E$ παράγουν τον E αν και μόνο αν $\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k$

κανονικά
αντί για
γεννήτορα
βάσης
αλλά στο μα
θημα θα
μείνουμε
στον $\mathbb{R}$

π.χ. $\mathbb{R}^2$ τα $(1, 2), (0, 1)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^2$.

Έστω τυχαίο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αρκεί να δούμε $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(x, y) = \lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (0, 1)$$

$$(x, y) = (\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y - 2x \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$(x, y) = x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)$$

□

ορισμός: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ υποχώρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ αποτελούν βάση του E αν και μόνο αν:

i) τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ είναι ΓΑ (= γραμ. ανεξάρτητα)

ii) τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ παράγουν τον E .

Διάσταση ενός χώρου E ορίζεται ως το πλήθος των διανυσμάτων της βάσης του. ($\dim E$).

π.χ. $(1, 2), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ είδαμε ότι παράγουν τον χώρο $\mathbb{R}^2$. Είναι και ΓΑ καθώς $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ βάση $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle (1, 2), (0, 1) \rangle$

Παρατηρήσεις:

Έστω $E = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle$ βάση του E ($\dim E = n$)

① Οποιαδήποτε διανύσματα του E , περισσότερα από n σε πλήθος είναι πάντα γραμ. εξαρτημένα.

② Αν $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k \in E$ γραμ. ανεξάρτητα $\Rightarrow k \leq n$

③ Αν $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k\}$ βάση του $E \Rightarrow k = n$

④ Σε χώρο διάστασης n , " n " γραμ. ανεξάρτητα διανύσματα είναι βάση (δεν χρειάζεται να δείξουμε ότι παράγουν τον χώρο)

π.χ. $(1, 2), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, ως γραμ. ανεξάρτητα ένα λύση του $\mathbb{R}^2$ (από παρατήρηση 4). $\square$

π.χ. $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$ - A

Να αποδειχθεί το A ως μια λύση του $\mathbb{R}^3$.

$\equiv$ έρουμε ότι $\frac{\text{λύση}}{\dim(\mathbb{R}^V)} = v \Rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ μια λύση του $\mathbb{R}^3$ αποσπάζεται από 3 διανύσματα.

Αρα, χρειόμαστε ακόμα ένα διάνυσμα Αρκει (από παρατήρηση 4) να βρούμε $(a, b, \delta) \in \mathbb{R}^3$ τω $A \cup \{(a, b, \delta)\}$ να είναι Γ A.

Αρκει $\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ a & b & \delta & \end{array} \right| \neq 0$

Αρκει να εξημερώσω από η κάτω τριγωνικό τω τω η ορίζεται ένα τω μινόμενο της κύριας διαγωνίου.

Αρα, $a=b=0$ και $\delta=1$

Σημείωση $(a, b, \delta) = (0, 0, 1)$

$\hookrightarrow$ Σχόλιο 7.

ΒΑΘΜΙΔΑ (αίνωτη επανάληψη)

βλέπε Γραμμική Αλγέβρα

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{επιτακτική μορφή}} \dots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (3)}$

$\Rightarrow r(A) = 3$ (τα 3-πρώτα διανύσματα του πίνακα που έχει πάρει επιτακτική μορφή)

(3) 2' είναι πίνακα A, όπου $\exists$ μια κ-τάξης ορίζουσα $\neq 0$ και ΟΝΕΣ, όδες την επανέλαση $(k+1)$ τάξης $= 0 \Rightarrow r(A) = k$ *

i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Παρατηρούμε ότι $\exists$ 3×3 ορίζουσα $\neq 0$ από * $\Rightarrow r(A) = 3$

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ το ίδιο ισχύει

iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1) όλες οι $3 \times 3 = 0$ τότε θα
κοιτάξω τις 2×2 ορίσους που
ένας διατερο του $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) κοιτώντας τον πίνακα να πάρει ελάχιστη μορφή
Ανάλυση $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow r(A) = 2$

* ————— *

παράδειγμα (Σ) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ 3x - 3y + 5z = 0 \\ 4x - 3y + 6z - t = 0 \end{cases}$

όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ $r(A) = 2$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$
και όλες οι 3×3 ορίσους
που την περιέχουν $= 0$

• $\det A = 0 \Rightarrow$ έχω άπειρες λύσεις

Αν N_T ο χώρος λύσεων του ομογενούς $\Rightarrow \dim N_T = n - r(A)$
όπου n ο αριθμός των αγνώστων

Στο παράδειγμα μας: $\dim N_T = 4 - 2 = 2 \leftarrow$ αριθμός παραμέτ.
 $z = \lambda, t = \mu$ και λύσω x, y, z, t ως προς λ, μ των

Για να βρω το x, y, z, t κοιτάξω την ορίσους που πήρα
 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ και παίρνω τις 2 εξισώσεις από όπου
προέρχονται

Ανάλυση το (Σ) είναι ισοδύναμο $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{z = \lambda}{t = \mu} \Rightarrow x = \mu - \lambda, y = \frac{-2\mu + 2\lambda - 4\lambda - \mu}{-3}$

ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Ορίσους: π.χ. $\begin{vmatrix} (+)1 & (+)2 & -1 \\ (-)0 & (+)1 & (+)2 \\ (+)1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Διαγράφοντας πάντα την 6ηδη και φρακτί όπου λήφθηκε το
6 το x το 0

Ιδιότητες οριζουσών → Ιδιότητες

- ① ορίζουσα με 1 ή 0 στην διαγώνιο $\Rightarrow$ $\det A = 0$
- ② ορίζουσα με 2 ταυτόχρονες ίδιες γραμμές ή στήλες $\Rightarrow 0$
- ③ Σε υπολογισμό ορίζουσας, αν αλλαγούμε θέση σε γραμμές / στήλες $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |B| = -|A|$$

④ $\det A = \det(A^t)$, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

⑤ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det I$$